УДК 532.58

СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ МЕДЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИПСОИДА

И.В. Дудин, Р.К. Нариманов

Томский государственный университет
E-mail: rin@ftf.tsu.ru

На основе применения преобразования простого растяжения-сжатия указана методика распространения решений задач, связанных с течениями несжимаемой вязкой жидкости в присутствии сферы, на варианты, когда сфера заменяется трехосным эллипсоидом. Решена задача о медленном обтекании эллипсоида, указана простая расчетная формула для его сопротивления. Показано удовлетворительное совпадение с литературными данными, соответствующими предельным случаям.

Введение

Некоторые задачи, связанные с интегрированием уравнений Навье-Стокса

$$\nabla \frac{\vec{v}\vec{v}}{2} - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} = -\mathrm{Eu}\, \nabla p - \frac{1}{\mathrm{Re}} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{v}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1)$$

или их упрощений, в случаях присутствия твердого или жидкого объекта в виде сферы единичного радиуса успешно решены путем использования функции тока

$$\psi = \frac{1}{2}\sigma^2 f(\sigma)\sin^2\theta, \quad (2)$$

$$\vec{\sigma} = \xi\vec{i} + \eta\vec{j} + \zeta\vec{k} = \sigma[\vec{i}\cos\theta + \sin\theta(\vec{j}\cos\varphi + \vec{k}\sin\varphi)].$$

При этом от функции $f(\sigma)$ требуется, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\psi\nabla\varphi) = 0, \quad (3)$$

что в общем случае влечет за собой представление

$$f(\sigma) = c_1 + c_2\sigma^{-1} + c_3\sigma^{-3} + c_4\sigma^2. \quad (4)$$

При различном наборе констант интегрирования в (4) функция тока (2) будет обеспечивать кинематические картины течения как во внутренних (вихри Адамара-Рябчинского-Хилла, $c_2=c_3=0$), так и во внешних ($c_4=0$) областях. Для внутренних течений ускорение является консервативным вектором, и давление находится из полных уравнений движения Навье-Стокса; в идеальном внешнем потоке ($c_2=0$) давление определено интегралом Бернулли, а во внешнем вязком оно находится из уравнений Стокса.

Ниже обсуждается проблема распространения отмеченных и других решений на случай замены сферы трехосным эллипсоидом. Сопротивление эллипсоида вращения при его медленном движении было найдено в [1] по теории ньютоновского потенциала притяжения. В [2] предпринята попытка определить сопротивление набегающему потоку вязкой жидкости трехосного эллипсоида при параллельности потока и одной из полуосей путем использования преобразования простого растяжения-сжатия, при котором сфера переводится в эллипсоид и наоборот.

В общем случае трехосный эллипсоид имеет бесконечно много сопротивлений, что зависит от его ориентации к набегающему потоку. Поэтому исследование выполняется в предположении, что орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовой системы координат жестко связаны с главными центральными осями эллипсоида

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

который в тексте будет фигурировать в виде уравнения (при $\sigma=1$)

$$\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{y}{\lambda_2}\right)^2+\left(\frac{z}{\lambda_3}\right)^2=\sigma^2,\ \lambda_1=\frac{a}{L},\ \lambda_2=\frac{b}{L},\ \lambda_3=\frac{c}{L},$$

где L – линейный масштаб, используемый при обезразмеривании системы Навье-Стокса, а в качестве x, y, z участвуют теперь безразмерные координаты. Используется линейный переход от размерного радиуса-вектора $\vec{r}$ к безрамерному

$$\vec{\sigma}=\xi\vec{i}+\eta\vec{j}+\zeta\vec{k}=\frac{x}{\lambda_1}\vec{i}+\frac{y}{\lambda_2}\vec{j}+\frac{z}{\lambda_3}\vec{k}$$

по схеме преобразования простого растяжения-сжатия

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=a\frac{x}{a}\vec{i}+b\frac{y}{b}\vec{j}+c\frac{z}{c}\vec{k}=L(\lambda_1\xi\vec{i}+\lambda_2\eta\vec{j}+\lambda_3\zeta\vec{k}),$$

$$\frac{\vec{r}}{L}=\Lambda\vec{\sigma},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Особое внимание уделено нахождению решения системы:

$$\nabla p+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}=0,\ \operatorname{div}\vec{v}=0,\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\ \vec{v}=0 \qquad (5)$$

в переменных вектора $\vec{\sigma}$ в области $1\le\sigma<\infty$ при условии прилипания $\vec{v}(1)=0$. Необходимо отметить, что возможное решение в переменных ξ, η, ζ не является универсальным, что можно пояснить следующим примером. Линейное уравнение движения свидетельствует о том, что давление p является гармонической функцией. Но, например, функция

$$p=\xi\sigma^{-3}=\frac{x}{\lambda_1}\left(\frac{x^2}{\lambda_1^2}+\frac{y^2}{\lambda_2^2}+\frac{z^2}{\lambda_3^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

в пространстве ξ, η, ζ является гармонической и теряет это свойство в пространстве x, y, z, если $\lambda_1\ne\lambda_2\ne\lambda_3$ ($\nabla^2 p(\xi,\eta,\zeta)=0$, $\nabla^2 p(x,y,z)\ne0$). Из этого следует, что система (5) при $\vec{v}(\xi,\eta,\zeta)$, $p(\xi,\eta,\zeta)$ не отражает законы гидромеханики в обычном понимании, и ее возможные решения при данной зависимости дают лишь приблизительную информацию о реальном явлении.

Обтекание эллипсоида. Скоростное поле и поле давления

Если эллипсоид находится под углом атаки, то скорость набегающего потока $\vec{V}(|\vec{V}|=1)$ удобно представить в виде разложения:

$$\vec{V}=V_1\vec{i}+V_2\vec{j}+V_3\vec{k},\quad V_1^2+V_2^2+V_3^2=1.$$

С тем, чтобы удовлетворить уравнению несжимаемости, скоростное поле ищется в виде:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{\sigma}}{dt}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}(f\vec{V}\times\vec{\sigma}),\ f=f(\sigma),\ \sigma^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

где $f(\sigma)$ выбирается из требования выполнения последнего уравнения системы (5).

Расшифровка операторов пространственного дифференцирования показывает, что

$$\vec{v}=\left(f+\frac{1}{2}\sigma f'\right)\vec{V}-\frac{1}{2}(\vec{\sigma}\vec{V})\sigma^{-1}f'\vec{\sigma},$$

$$\operatorname{rot}\vec{v}=-\frac{1}{2}(f''+4\sigma^{-1}f')\vec{V}\times\vec{\sigma},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(\sigma(f''+4\sigma^{-1}f')'+2(f''+4\sigma^{-1}f'))\vec{V}-\\ -(\vec{\sigma}\vec{V})\sigma^{-1}(f''+4\sigma^{-1}f')'\vec{\sigma}\end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}=\frac{1}{2}[(f''+4\sigma^{-1}f')''+4\sigma^{-1}(f''+4\sigma^{-1}f')']\vec{V}\times\vec{\sigma},$$

$$\operatorname{rot}(\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v})=-\frac{1}{2}(\vec{\sigma}\vec{V})\sigma^{-1}f(f''+4\sigma^{-1}f')'\vec{V}\times\vec{\sigma}.$$

Теперь видно, что третье условие (5), соответствующее требованию (3), будет выполнено, если функция $f(\sigma)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$(f''+4\sigma^{-1}f')''+4\sigma^{-1}(f''+4\sigma^{-1}f')'=0,$$

что в общем случае приводит ее к представлению по (4). Заодно легко просматриваются варианты для исполнения полного уравнения Гельмгольца, получаемого после применения к первому соотношению из (1) операции ротирования.

Если при внешнем обтекании потребовать, чтобы при σ=1 поверхность объекта (в пространстве x, y, z им служит эллипсоид, а в пространстве ξ, η, ζ – сфера) была поверхностью тока и на ней осуществлялось прилипание, а вдали от него было

$$\vec{v}(\infty)=\vec{V}\ \left(\vec{v}=\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\ne\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

то (4) примет вид:

$$f'=1-\frac{3}{2}\sigma^{-1}+\frac{1}{2}\sigma^{-3},$$

а это приводит к тому, что скоростное поле представится равенствами:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}&=V_1\left(1-\frac{3}{4}\sigma^{-1}-\frac{1}{4}\sigma^{-3}-\frac{3}{4}\xi^2\sigma^{-3}(1-\sigma^{-2})\right)-\\&-\frac{3}{4}V_2\,\xi\eta\sigma^{-3}(1-\sigma^{-2})-\frac{3}{4}V_3\,\xi\eta\sigma^{-3}(1-\sigma^{-2}),\\ \dot{\eta}&=-\frac{3}{4}V_1\,\xi\eta\sigma^{-3}(1-\sigma^{-2})+\\&+V_2\left(1-\frac{3}{4}\sigma^{-1}-\frac{1}{4}\sigma^{-3}-\frac{3}{4}\eta^2\sigma^{-3}(1-\sigma^{-2})\right)-\\&-\frac{3}{4}V_3\,\eta\zeta\sigma^{-3}(1-\sigma^{-2}),\\ \dot{\zeta}&=-\frac{3}{4}V_1\,\xi\zeta\sigma^{-3}(1-\sigma^{-2})-\frac{3}{4}V_3\,\eta\zeta\sigma^{-3}(1-\sigma^{-2})+\\&+V_3\left(1-\frac{3}{4}\sigma^{-1}-\frac{1}{4}\sigma^{-3}-\frac{3}{4}\zeta^2\sigma^{-3}(1-\sigma^{-2})\right).\end{aligned} \qquad (6)$$

А поскольку теперь

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}=\frac{3}{2}(\sigma^{-3}\vec{V}-3(\vec{\sigma}\vec{V})\sigma^{-5}\vec{\sigma})=\frac{3}{2}\nabla((\vec{\sigma}\vec{V})\sigma^{-3}),$$

то из закона движения по Стоксу поле давления будет определено формулой

$$p=-\frac{3}{2}(\vec{\sigma}\vec{V})\sigma^{-3}. \qquad (7)$$

По форме система равенств (6) и (7) выглядит совершенно одинаково как для эллипсоида, так и для сферы. Но в первом случае надо читать:

$$\xi = \frac{x}{\lambda_1}, \eta = \frac{y}{\lambda_2}, \zeta = \frac{z}{\lambda_3} \quad \left(\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, \zeta = \frac{z}{c}\right),$$

а во втором:

$$\xi = \frac{x}{R}, \eta = \frac{y}{R}, \zeta = \frac{z}{R},$$

где a, b, c, R – соответственно полуоси эллипсоида и радиус сферы. Вполне понятно, что при наличии только одной составляющей скорости набегающего потока, направленной вдоль оси эллипсоида, формулы упрощаются, а для сферы они воспроизводят известное [1] решение Стокса.

Еще раз следует отметить, что найденные поля (6) и (7) для обтекания эллипсоида не являются вполне достоверными, так как безразмерная система (5) при учете масштабов a, b, c будет выглядеть несколько по иному. Вопрос о степени достоверности найденного решения можно выяснить после вычисления сопротивления взятых объектов.

Сопротивление сферы и эллипсоида

Сопротивление состоит, как известно, из двух слагаемых – сопротивления от давления $\vec{F}(p) = -\int p d\vec{S}$ и сопротивления трения $\vec{F}(\gamma) = 2\int \gamma d\vec{S}$. Здесь через $d\vec{S}$ обозначен направленный по нормали поверхностный элемент объекта, а через γ – тензор скорости деформации, компоненты которого в силу отмеченных особенностей скоростного поля выглядят совершенно одинаково для сферы и эллипсоида. На самой поверхности (при $\sigma=1$) они запишутся в виде формул:

$$\gamma_{\xi\xi} = \frac{3}{2}\xi(V_1(1-\xi^2) - V_2\xi\eta - V_3\xi\zeta),$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{3}{4}(V_1\eta(1-2\xi^2) + V_2\xi(1-2\eta^2) - 2V_3\xi\eta\zeta),$$

$$\gamma_{\xi\zeta} = \frac{3}{4}(V_1\zeta(1-2\xi^2) - 2V_2\xi\eta\zeta + V_3\xi(1-2\zeta^2)),$$

$$\gamma_{\eta\eta} = \frac{3}{2}\eta(-V_1\xi\eta + V_2(1-\eta^2) - V_3\eta\zeta),$$

$$\gamma_{\eta\zeta} = \frac{3}{4}(-2V_1\xi\eta\zeta + V_2\zeta(1-2\eta^2) + V_3\eta(1-2\zeta^2)),$$

$$\gamma_{\zeta\zeta} = \frac{3}{2}\zeta(-V_1\xi\zeta - V_2\eta\zeta + V_3(1-\zeta^2)).$$

При этом давление на поверхности принимает значение:

$$p = -\frac{3}{2}\vec{\sigma}\vec{V} = -\frac{3}{2}(V_1\xi + V_2\eta + V_3\zeta).$$

При производстве процедур по интегрированию необходимо учесть, что

$$\xi = \cos\theta, \eta = \sin\theta\cos\varphi, \zeta = \sin\theta\sin\varphi; 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

благодаря чему поверхностные элементы берутся в виде записей для сферы и эллипсоида соответственно

$$d\vec{S} = (\xi\vec{i} + \eta\vec{j} + \zeta\vec{k})\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$$d\vec{S} = (\lambda_2\lambda_3\xi\vec{i} + \lambda_1\lambda_3\eta\vec{j} + \lambda_1\lambda_2\zeta\vec{k})\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Исполнение процедур по вычислению приводит к результатам для сферы

$$\vec{F}(p) = 2\pi\vec{V}, \vec{F}(\gamma) = 4\pi\vec{V}, \vec{F}(p,\gamma) = \vec{F}(p) + \vec{F}(\gamma) = 6\pi\vec{V}, (|\vec{V}| = 1)$$

и для находящегося под углом атаки эллипсоида

$$\vec{F}(p) = 2\pi(\lambda_2\lambda_3 V_1\vec{i} + \lambda_1\lambda_3 V_2\vec{j} + \lambda_1\lambda_2 V_3\vec{k}),$$

$$\vec{F}(\gamma) = \frac{2}{5}\pi[(4\lambda_2\lambda_3 + 3\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3))V_1\vec{i} + \ldots] \text{ (по циклу)},$$

$$\vec{F}(p,\gamma) = \frac{6}{5}\pi[(3\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3))V_1\vec{i} + \ldots] \text{ (по циклу)}.$$

Итоговая информация в размерных величинах получается после умножения соответствующих выражений на размерные комплексы $\mu|\vec{V}_\infty|R$, $\mu|\vec{V}_\infty|L$, благодаря чему она фиксируется формулами:

$$\vec{F}(p,\gamma) = 6\pi\mu R\vec{V}_\infty,$$

$$\vec{F}(p,\gamma) = \frac{6}{5}\pi\frac{\mu}{L}\begin{bmatrix}(3bc + a(b+c))V_{1\infty}\vec{i} + \\ +(3ac + b(a+c))V_{2\infty}\vec{j} + \\ +(3ab + c(a+b))V_{3\infty}\vec{k}\end{bmatrix}$$

соответственно для сферы и эллипсоида. Для варианта обтекания без угла атаки, например, при $\vec{V}_\infty = V_\infty\vec{i}$ итоговые формулы понятным образом упрощаются и принимают вид:

$$X^* = 6\pi\mu RV_\infty, X_* = \frac{6}{5}\pi\frac{\mu V_\infty}{L}(3bc + a(b+c)). \qquad (8)$$

Обычно сравнение сведений по сопротивлению производится путем введения эквивалентной сферы, радиус которой $R=R(a,b,c,L)$ получается в результате совпадения сил X_* и X^* из формул (8), что дает

$$LR_a = \frac{1}{5}[3bc + a(b+c)].$$

Индекс подчеркивает, в направлении какой из главных центральных осей инерции движется эллипсоид. Здесь масштаб обезразмеривания L остается неопределенным, и способы его выбора нуждаются в дополнительных обоснованиях. Наиболее простым (напрашивающимся) выбором этого линейного размера является равенство $L=R$, что влечет за собой

$$R_a^2 = \frac{1}{5}[3bc + a(b+c)], \qquad (9)$$

здесь и далее предполагается, что полуось параллельна направлению набегающего потока.

Но следует заметить, что такой выбор размера L в случаях вырождения эллипсоида в пластины, когда преобразование координат перестает работать, вряд ли можно считать оправданным. Например, по теории потенциала притяжения известно [1], что предельные выражения для сил сопротивления плоского круглого диска (радиуса b), движущегося в направлениях, перпендикулярном своей плоскости и параллельном ей, соответственно равны

$$X = 16\mu bV, \quad X = \frac{32}{3}\mu bV,$$

что при сравнении с эквивалентной сферой означает

$$\frac{R}{b} = \frac{8}{3\pi} \approx 0{,}85, \quad \frac{R}{b} = \frac{16}{9\pi} \approx 0{,}57.$$

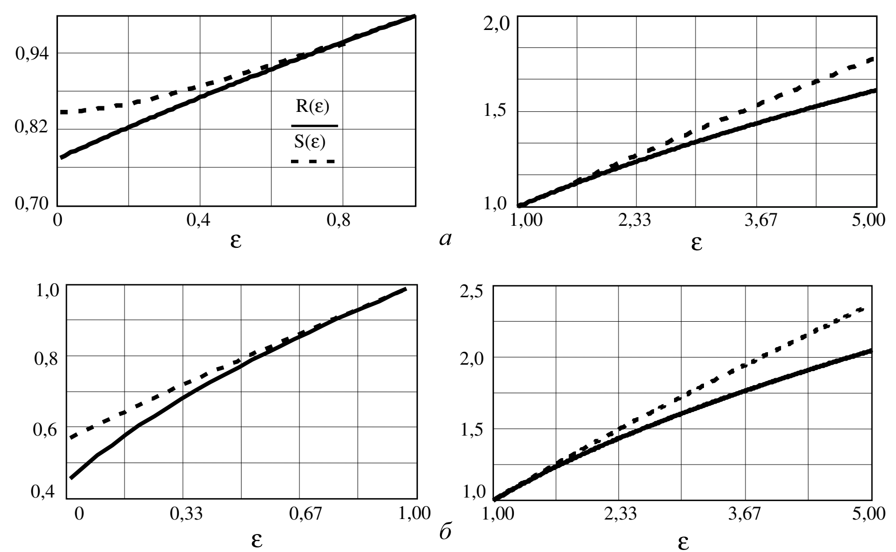


Рисунок. *Отношение эффективного радиуса сопротивления к величине полуоси: а) поперечной направлению движения, б) параллельной направлению движения*

В то время как из (9), в случае a=0 и b=c, соответствующем варианту движения диска перпендикулярно своей плоскости, имеем

$$\frac{R_a}{b}=\frac{\sqrt{15}}{5}=0,7746,$$

а при a=b и c=0, что соответствует движению параллельно плоскости диска:

$$\frac{R_a}{b}=\frac{\sqrt{5}}{5}=0,4472.$$

Попутно можно отметить, что по [1] сопротивление диска при движении в ортогональном к своей плоскости направлении в полтора раза больше, чем в продольном, а по (9) это отношение составляет $\sqrt{3}$=1,732.

Подобно [3] для течения, параллельного оси симметрии (при b=c), введем отношение длины к диаметру ε=a/c. Из (9) отношение эффективного радиуса к величине поперечной полуоси будет

$$R=\frac{R_a}{c}=\sqrt{\frac{1}{5}(3+2\varepsilon)}. \qquad (10)$$

Из [3] данная величина при ε>1 равна:

$$S=\frac{8}{3}\frac{1}{\left[-\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2-1}+\frac{2\varepsilon^2-1}{(\varepsilon^2-1)^{3/2}}\ln\left(\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)\right]},$$

а при ε<1:

$$S=\frac{8}{3}\frac{1}{\left[\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}+\frac{2(1-2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)\right]}. \qquad (11)$$

На рисунке, *а* приведено сравнение формулы (9) с данными [3] при различных значениях ε при движении эллипсоида вдоль оси симметрии. В случае движения поперек направления оси симметрии следует положить a=b и ввести ε=c/a. Тогда (9) дает

$$R=\frac{R_a}{a}=\sqrt{\frac{1}{5}(4\varepsilon+1)}. \qquad (12)$$

Согласно [3] при ε>1:

$$S=\frac{8}{3}\frac{1}{\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2-1}+\frac{2\varepsilon^2-3}{(\varepsilon^2-1)^{3/2}}\ln(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-1})\right]},$$

а при ε<1:

$$S=\frac{8}{3}\frac{1}{\left[-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}-\frac{2\varepsilon^2-3}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\arcsin(\sqrt{1-\varepsilon^2})\right]}. \qquad (13)$$

На рисунке, *б* приведено сравнение при различных значениях ε в случае движения тела поперек оси симметрии. Как видно, (9) дает всюду заниженные результаты при хорошем совпадении для тел, мало отличающихся от сферических. Следует отметить, что при $\varepsilon\to 0$ формулы (10) и (11) соответствуют диску, движущемуся в потоке, перпендикулярном своей плоскости, а формулы (12) и (13) – диску, движущемуся параллельно своей плоскости.

Полученная информация о сопротивлении при значительных отличиях полуосей a, b, c от радиуса сферы R, существенно расходится с имеющимися теоретическими сведениями. Объясняется это, по-видимому, тем, что использованная система (5), записанная с применением изотропного обезразмеривания, некоторым образом отличается от той, которая получается при неизотропном обезразмеривании. Это обстоятельство приводит к тому, что введенная функция $f(\sigma)$ должна иным образом зависеть от аргументов ξ, η, ζ.

Заключение

Таким образом, решена задача о медленном обтекании эллипсоида, мало отличающегося от сферы, указана формула для расчета его сопротивления.

Использованные обозначения

$\vec{v}$ – вектор скоростей, Eu – число Эйлера, Re – число Рейнольдса, p – давление, ψ – функция тока, θ – сферическая координата, φ – потенциал, a, b, c – полуоси эллипса, ξ, η, ζ – криволинейные координаты, x, y, z – декартовы координаты, μ – динамическая вязкость, X^*, X_* – силы сопротивления, $d\vec{S}$ – элемент поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
2. Дудин И.В., Нариманов Р.К. Сопротивление медленно движущегося в вязкой жидкости трехосного эллипсоида // Препринт № 37. – Томск: Изд-во ТГУ, 2000. – 11 с.
3. Хаппель Д., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.

УДК 536.46